18/02/2019

Μάθημα 1ο

Βαθμωτά: Εκφράζονται από ένα μόνο μέγεθος

$f(x)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ π.χ. ρ, T, ρ κτλ, , $T(x,y,z) \mapsto \mathbb{R}$

-χωρικές

Διανυσματικά: Εκφράζονται με περισσότερες από μία συνιστώσες-μεταβλητές.

$\bar{g}(x,y,z) \to \mathbb{R}^n$ (μέχρι 3 συνιστώσες)

π.χ. $\bar{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{u}(x,y,z) = (u_1, u_2, u_3)$

π.χ. ταχύτητα, επιτάχυνση

Εργαλεία για ερμηνεία φυσικών φαινομένων.

Τανυστικά: Τα μεγέθη που χρειάζονται περισσότερες από 3 μεταβλητές για να περιγραφούν. ($Βαθμ. \subset Διανυσμ. \subset Τανυσ.$)

π.χ. Τανυστής Τάσης : $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$ g: συνιστώσες

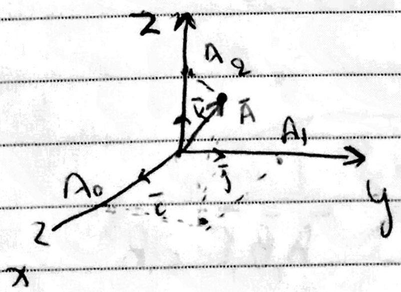
Θα περιγράψει τις τάσεις που ασκούνται πάνω σε ένα στερεό ή υγρό σώμα

- $\bar{A} = A_1 \hat{i} + A_1 \hat{j} + A_2 \hat{k}$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^3$

μήκος Μπορώ να μετρήσω αυτό το διάνυσμα → νόρμα

$|\bar{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$: μέτρο ή μήκος του $\bar{A}$

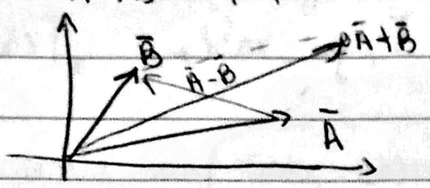
Δεξιόστροφο → xyz



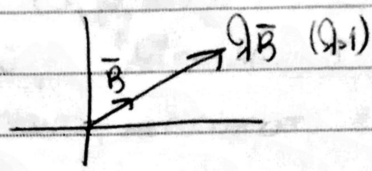
Στον $\mathbb{R}^n$ → τις

$\mathbb{R}^3$ 1.1 Ευκλείδια μετρική

προσθέτω: $\bar{A}+\bar{B}$: κανόνας παραλ/μου.

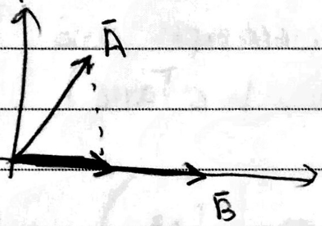


πολ/μος : $\lambda\bar{B}$: $\lambda\in\mathbb{R}$, διάνυσμα



→ Εσωτ. ή βαθμ. γινόμ. : $\bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}|\cdot|\bar{B}|\cdot \text{συν}\theta$, $\theta\in[0,\pi)$

Η προβολή του ενός πάνω στο άλλο



βαθμωτό μέγεθος.

$\bar{A}\cdot\bar{B} \overset{\bar{A}\bar{B}\neq\bar{0}}{\Longrightarrow} \bar{A}\perp\bar{B}$

→ Εξωτερικό ή διανυσμ. γινόμενο :

Έστω $\bar{A},\bar{B}\in\mathbb{R}^3$ Διανυσματικό μέγεθος

$\bar{A} : A_0\bar{i} + A_1\bar{j} + A_2\bar{k}$, $|\bar{A}| = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2}$

$\bar{A}\times\bar{B} = (|\bar{A}|\cdot|\bar{B}|\cdot\sin\theta)\cdot\bar{K}$ Δίνει δεξιόστροφο σύστημα.

ή

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix} {}^{+}\bar{i} & {}^{-}\bar{j} & {}^{+}\bar{k} \\ {}^{-}A_0 & {}^{+}A_1 & {}^{-}A_2 \\ {}^{+}B_0 & {}^{-}B_1 & {}^{+}B_2 \end{vmatrix} = (A_1B_1 - A_2B_1)\bar{i} - (A_0B_2 - A_2B_0)\bar{j} + (A_0B_1 - A_1B_0)\bar{k}$$

Παρατήρηση: $\bar{A}\times\bar{B} = \bar{0} \overset{\bar{A},\bar{B}\neq\bar{0}}{\Longrightarrow} \bar{A}/\!/\bar{B}$

→ Μικτό γινόμενο ή βαθμωτό τριπλό γινόμενο : $\bar{A},\bar{B},\bar{\Gamma}\in\mathbb{R}^3$

$$\bar{A}\cdot(\underbrace{\bar{B}\times\bar{\Gamma}}_{\bar{\Delta}}) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ \Gamma_0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

διαν.

εξωτερικό, διάνυσμα

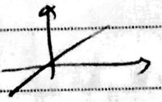
εσωτ.

βαθμωτό μέγεθος

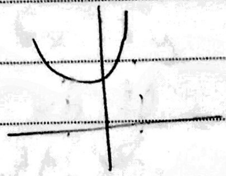
παριστάνει τον όγκο του παραλ/δου που δημιουργ. από τα A,B,Γ

Διαφορικές Εξισώσεις:

π.χ. $x+y=2$ γραμ. αλγεβρική εξίσωση
$y=-x+2$ → γραμμή στον $\mathbb{R}^2$.



$y=-x^2+2$ για 1 y → 2 x
παραβολή μη γραμ.



Τα φαινόμενα στη φύση περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις
περιέχουν → f, και τις παραγώγους $f'(x)$

→ ΣΔΕ, $y(x)$ (συναρτ. μιας ανεξ. μεταβλ.) π.χ. $y'+2y=0$
$y'(x)+2y(x)=0$
εξαρτ. μεταβλ. ανεξ. μεταβλ.

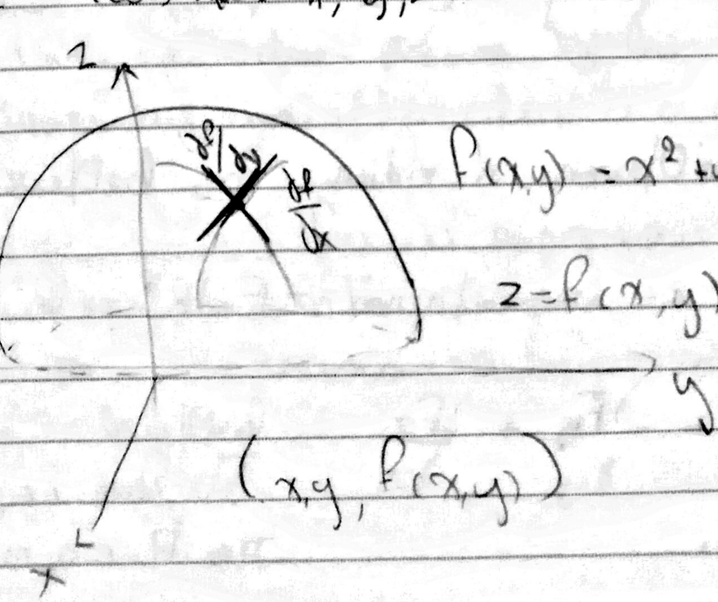
ΣΔΕ, 1ης τάξης, 1ου βαθμού, γραμμική, ομογενής.
Στην κλασική ασχολούμαστε με ντετερμινιστικά προβλήματα και όχι στοχαστικά
αξιώματα και θεωρήματα όχι στοχαστ.
στοχαστικά

→ Μ.Δ.Ε. παραγωγίζω μερικώς → $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$
μας δίνουν την μεταβολή της f προς συγκεκριμένη διεύθυνση
(ως προς x, y, z)

$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$f(x,y)=x^2+y^2$.

$z=f(x,y)$



$f(x,y)$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

μερικές $\to \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Ολική μεταβολή $\to$ $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$ (κανόνας αλυσίδας)

Ολική παράγωγος $\to$ $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

Ανάδελτα: $\underbrace{\bar{\nabla}^2 f(x,y,z)} = 0$ Laplace τελεστής

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Ανάδελτα ∇ (nabla)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Αν δράσει πάνω σε βαθμωτή: π.χ. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)$

$\bar{\nabla} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ δίνει διάνυσμα $\to$ μεταβολή της f ως προς κάθε διεύθυνση.

ή $\bar{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$

grad f, βάθμωση ή κλίση της βαθμωτ. συναρτ. f.

Αν δράσει πάνω σε διανυσματική $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (π.χ. ταχύτητα)

$\text{div}\bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$ βαθμωτό $\to$ Απόκλιση $\bar{\nabla}\cdot\bar{F}$

εσωτερικό

διάνυσμα εσωτερικό διάνυσμα

συνολική έκφραση μεταβολής της $\bar{F}$ στο σημείο

Στροβιλισμός: Πως [redacted] μια συνάρτηση δημιουργεί στροβιλισμό στο σημείο.

$$curl\,\bar F = \bar\nabla \times \bar F = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar i - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\bar j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar k.$$

Πως μεταβάλλ η F_z ως προς y

η F_y ως προς z

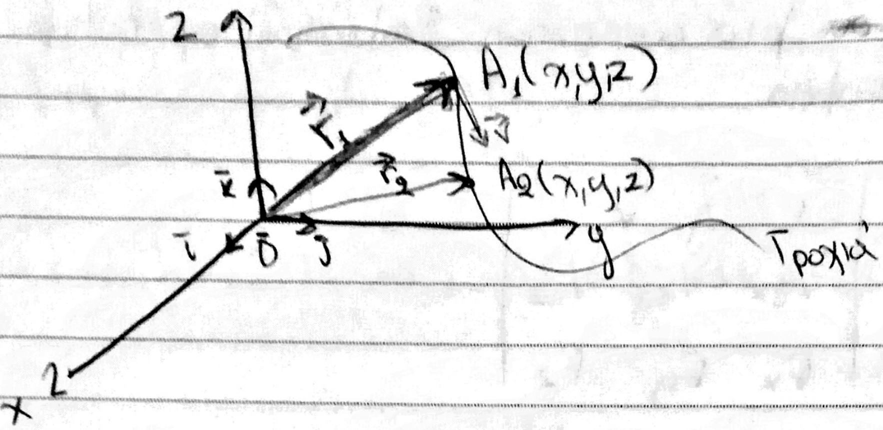
Άρα φαίνεται ο στροβιλισμός.

Κλασική Μηχανική
↓
Κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κίνηση: Η κατάσταση ενός σώματος, π.χ. η αλλαγή της θέσης του (ως προς τι;) ως προς ένα ακίνητο σημείο αναφοράς

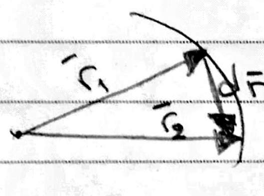
Υλικό Σημείο: Ένα σώμα που δεν έχει διαστάσεις, αλλά έχει μόνο τη μάζα του (δηλ. εφοδιασμένο με ένα θετικό αριθμό, m)
(Στη φύση τίποτα δεν είναι υλικό σημείο ούτε ακίνητο)

Θέση του Υλικού Σημείου: Για να περιγράψω τη θέση → πρέπει να πάρω ένα σύστημα αναφοράς
Παίρνω το καρτεσιανό & δεξιόστροφο



Θέλω ένα διάνυσμα που πάντα θα ακολουθεί το υλικό σημείο μου → διάνυσμα θέσης → Μου δείχνει πάντα που βρίσκεται το υλικό σημείο.

<u>Τροχιά:</u> Τα σημεία από τα οποία περνάει το υλικό σημείο.
$A_i = (x_i, y_i, z_i)\ \forall i$



$\bar r_2 - \bar r_1 = d\bar r$

Η τροχιά, θα θεωρώ, ότι είναι πάντα μία <u>λεία</u> καμπύλη (smooth)

είναι δηλ. C^∞

άπειρες φορές παραγωγ. και συνεχής.

<u>Ταχύτητα υλικού σημείου:</u> $\bar v = \frac{d\bar r}{dt} = \dot{\bar r} = \dot x \bar i + \dot y \bar j + \dot z \bar k$

Είναι πάντα εφαπτόμενη της τροχιάς.